4.8 Metodi di ammortamento

Per ***metodo di ammortamento*** si intende una qualunque regola seguendo la quale si riesce a garantire che l'ammortamento di un prestito sia operazione equa, cioè verifichi una condizione di chiusura. Ovviamente, di metodi siffatti ne esistono infiniti, come infiniti sono i possibili abiti di sartoria. Dato che non possiamo render conto di tutti i metodi d'ammortamento "su misura", ci limiteremo ad esplorare qualcuno dei metodi standard (gli "abiti fatti"), cioè dei metodi più semplici, perciò più diffusi, precisamente quelli della lista che segue:

a) ***rimborso unico finale di capitale ed interessi;***
b) ***rimborso unico finale del capitale e periodico degli interessi;***
c) ***metodo francese***, o ***progressivo in senso stretto*** (con rate costanti);
d) ***metodo italiano***, o ***uniforme*** (con quote capitale costanti);
e) ***metodo americano***, o ***a due tassi*** (come nel caso (b), ma con parallela costituzione del capitale per la scadenza finale);
f) ***metodo tedesco***, o ***degli interessi anticipati.***

In tutti i casi adottiamo le ipotesi semplificatrici **(4.7.27)**, ovvie essendo le varianti che si rendono necessarie fuori da queste (ammortamento non periodico, periodico ma non annuo, tassi variabili).

4.8.1 Rimborso unico finale di capitale ed interessi

Su questo metodo c'è ben poco da dire: in esso è prevista un'unica rata positiva $R_n = Su^n$, la quale comprende, oltre al capitale S, gli interessi $I_n = S(u^n - 1)$ generati da S tra 0 ed n. Se esigenze contabili lo impongono, si può fare il punto della situazione anche alle altre scadenze, nel qual caso basta prevedere le altre rate tutte nulle e troveremo

$$D_k = Su^k,\ I_k = iSu^{k-1},\ C_k = -I_k = -iSu^{k-1},\ k \in \{1, 2, \dots n-1\}.$$

4.8.2 Rimborso unico finale del capitale e periodico degli interessi

Poco di più si può dire sul metodo (b) di rimborso unico finale del capitale e periodico degli interessi. In esso le prime $(n-1)$ quote capitale sono tutte nulle:

$$C_k = 0,\ k \in \{1, 2, \dots n-1\},$$

mentre l'ultima, cioè

$$C_n = S,$$

fa la parte del leone. Il debito residuo resta dunque costante sul livello iniziale S fino all'ultima scadenza esclusa, alla quale ovviamente si azzera. Di conseguenza tutte le quote interessi sono di comune ammontare

$$I_1 = I_2 = \cdots = I_n = Si,$$

le prime $(n-1)$ rate comprendono solo la quota interessi:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_{n-1} = Si,$$

e l'ultima rata R_n sarà

$$R_n = C_n + I_n = S + Si = Su.$$

4.8.3 Metodo francese (rate costanti)

Veniamo al metodo forse più usato nella pratica: il *metodo francese*. Come già anticipato, la sua caratteristica peculiare risiede nel fatto che esso prevede rate tutte eguali ad un comune importo, chiamiamolo R:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R.$$

In questo caso la condizione di equità prospettiva sulle rate si riscrive, usando il noto simbolo $a_{\overline{n}|i}$, nella più semplice espressione

$$S = R\left(v + v^2 + \cdots + v^n\right) = R\frac{1-v^n}{i} = Ra_{\overline{n}|i}.$$

Da questa si può trarre, con $\alpha_{\overline{n}|i}$ reciproco di $a_{\overline{n}|i}$, l'importo della rata costante R in funzione dell'ammontare S del debito, della durata n e del tasso i:

$$R = S\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = S\alpha_{\overline{n}|i} = S\frac{i}{1-v^n}. \tag{4.8.28}$$

Dall'equazione prospettiva del debito residuo che coinvolge le rate si trae allora, grazie alla (4.8.28),

$$D_k = R\left(v + v^2 + \cdots + v^{n-k}\right) = Ra_{\overline{n-k}|i} = S\frac{1-v^{n-k}}{1-v^n},\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

ed anche

$$I_k = iD_{k-1} = iRa_{\overline{n-k+1}|i} = R\left(1 - v^{n-k+1}\right), \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Per la quota capitale C_k abbiamo allora

$$C_k = R - I_k = R - R\left(1 - v^{n-k+1}\right) = Rv^{n-k+1}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

sicché le quote capitale descrivono una progressione geometrica di ragione $v^{-1} = u = (1+i)$ e di primo termine

$$C_1 = Rv^{n-1+1} = Rv^n,$$

ovvero, se si preferisce usare ancora la (4.8.28) ed il simbolo $\sigma_{\overline{n}|i}$,

$$C_1 = Rv^n = S\frac{i}{1-v^n}v^n = S\frac{i}{u^n-1} = S\sigma_{\overline{n}|i}.$$

Il termine di **_metodo progressivo in senso stretto_** col quale è noto il metodo francese non risiede nel semplice fatto che esso prevede quote capitali tutte positive, perciò debiti residui strettamente decrescenti (si riveda il § 4.4), bensì nel fatto che queste descrivono una ben precisa progressione geometrica.

4.8.4 Metodo italiano (quote capitale costanti)

La costanza delle quote capitale, tutte pari ad un comune importo C, caratterizza il **_metodo italiano_**, o **_uniforme_**:

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = C.$$

Usando le relazioni tipiche dell'approccio elementare si trae subito

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = C = \frac{S}{n}$$

$$D_k = (n-k)\,C = \frac{n-k}{n}S, \quad k \in \{0, 1, , \ldots, n\}$$

$$E_k = kC = \frac{k}{n}S, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$I_k = \frac{n-k+1}{n}Si, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$R_k = \frac{S}{n}\{1 + i\,(n-k+1)\}\,, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}\,,$$

e si nota che tutte le successioni $\{D_k\}$, $\{E_k\}$, $\{I_k\}$, $\{R_k\}$ descrivono progressioni aritmetiche, ciò che spiega il nome di **_ammortamento lineare_** talvolta affibbiato al metodo.

4.8.5 Metodo americano, o a due tassi

Un po' più articolato è il **_metodo americano_**. Partiamo da un mutuo gestito con rimborso annuo degli interessi ed unico finale del capitale, cioè col metodo già discusso nel § 4.8.1. Il debitore può trovare utile versare ogni anno, oltre alla quota interessi, anche un importo (fisso o variabile) in modo da costituirsi per la scadenza finale il capitale S, capitale che egli ritirerà per versarlo al creditore. D'altra parte quest'ultimo non può che vedere di buon occhio tale comportamento,